b) Calculer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre ABCD.
c) En déduire la distance du point D au plan (ABC).

2) Vérifier qu'une équation du plan P passant par A, B et C est x+y+z-1=0.

3) Soit S l'ensemble des points M(x,y,z) de l'espace et vérifiant : $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+1=0$.
a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon R.
b) Montrer que P coupe S suivant un cercle ζ dont on précisera le centre et le rayon.

4) Soit $h: E \to E,\ M \mapsto M'$ tels que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$.
a) Montrer que le G centre de gravité du triangle ABC est l'unique point invariant par h.
b) En déduire que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
c) Déterminer S'=h(S) ainsi que $S' \cap P$.

Exercice N°9 1)a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow dét\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix}-1 & -1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}-1 & 0\\1 & 1\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}$

$= -(-1) - (-1) = 2 \neq 0$ alors A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

b) $A_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2+1^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.ua$. $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|dét\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right| \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.uv$

c) $d\left(D,(ABC)\right) = h$ où h est l'hauteur issu de D du tétraèdre ABCD. $V_{ABCD} = \frac{h \times A_{ABC}}{3} \Rightarrow h = \frac{3V_{ABCD}}{A_{ABC}}$

$\Rightarrow d\left(D,(ABC)\right) = \frac{3 \times \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

2) A(1,0,0),1+0+0-1=0 alors $A \in P$; B(0,1,0),0+1+0-1=0 alors $B \in P$;C(0,0,1), 0+0+1-1=0 alors $C \in P$ Or A,B et C ne sont pas colinéaires d'où x+y+z-1=0 est l'équation du plan P passant par A,B et C.

3) a) $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+1=0$ sig $(x^2-2x+1)-1+(y^2-2y+1)-1+(z^2-2z+1)-1+1=0$ sig $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$ est l'équation d'une sphère de centre D(1,1,1) et de rayon $R = \sqrt{2}$.

b) $d\left(D,P\right) = \frac{|1+1+1-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} < R = \sqrt{2}$ alors $P \cap S$ est un cercle de centre H projeté orthogonal de I sur P et de rayon

$r = \sqrt{R^2-d^2} = \sqrt{4-\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $\overrightarrow{IH} = \alpha\vec{n} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_H-1\\y_H-1\\z_H-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\\alpha\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x_H = 1+\alpha\\y_H = 1+\alpha\\z_H = 1+\alpha\end{cases}$;

$H \in P \Rightarrow 1+\alpha+1+\alpha+1+\alpha-1=0 \Rightarrow \alpha = \frac{-2}{3}$ alors $H\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Remarque : On a $\{A,B,C\} \in S$ et P=(ABC) alors $P \cap S$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.

4) a) $\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$ alors l'unique point invariant par h est le centre de gravité G du triangle ABC (car $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$).

b) $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = 3\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = 4\overrightarrow{GM}$ alors h est une homothétie de centre G et de rapport 4. $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}, \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right) \Rightarrow G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

c) S'=h(S) est la sphère de centre l'image du centre de S et de rayon $R' = |k|R = 4\sqrt{2}$;

$I' = h(I) \Rightarrow \overrightarrow{GI'} = 4\overrightarrow{GI} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_{I'}-\frac{1}{3}\\y_{I'}-\frac{1}{3}\\z_{I'}-\frac{1}{3}\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}1-\frac{1}{3}\\1-\frac{1}{3}\\1-\frac{1}{3}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x_{I'} = \frac{8}{3}+\frac{1}{3} = 3\\y_{I'} = 3\\z_{I'} = 3\end{cases}$ d'où $I'(3,3,3)$. $S \cap P$ est le cercle circonscrit au triangle

Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...